Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на первый курс, 2018 год

1. $\boxed{5}$ Найти предел числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[7]{2n^5+n^7}\,\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{-21n^2}$.

2. $\boxed{5}$ Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\frac{x^6+x^3}{\sqrt[4]{(16+x^3)^3}}$ до $o(x^{3n})$.

Найти $f'''(0)$.

3. $\boxed{5}$ Построить график функции $y=\frac{(3x-5)(3-x)}{(x-2)^2}$. Найти кривизну в точке $x=1$.

При построении графика найти асимптоты, исследовать функцию с помощью первой и второй производных. Указать промежутки монотонности, выпуклость, точки перегиба, экстремумы. Указать и описать критические точки производных. Изобразить график. Рисунок должен соответствовать вычислениям.

4. $\boxed{5}$ Найти расстояние между прямыми $x-1=\frac{y-1}{2}=1-z$ и $\begin{cases}3x-2y+2z=1,\\ 2x-y-z=3.\end{cases}$

Система координат прямоугольная.

5. $\boxed{5}$ Даны неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти все векторы $\mathbf{c}\neq\mathbf{0}$ такие, что

$$[[\mathbf{a},\mathbf{c}],[\mathbf{b},\mathbf{c}]]=\mathbf{c},\quad (\mathbf{a},\mathbf{c})=(\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

6. $\boxed{5}$ При некотором преобразовании плоскости каждая точка, имеющая координаты (x,y) в системе координат $A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ переходит в точку с теми же координатами (x,y) в системе координат $O,\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти уравнения всех инвариантных прямых этого преобразования в системе координат $A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Ответы.

---

1. $\boxed{5}$ Найти предел числовой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[7]{2n^5+n^7}\operatorname{tg}\frac{1}{n}\right)^{-21n^2}$.

Ответ: e^{-13}.

2. $\boxed{5}$ Разложить по формуле Маклорена функцию $f(x)=\frac{x^6+x^3}{\sqrt[4]{(16+x^3)^3}}$ до $o(x^{3n})$.

Найти $f'''(0)$.

Ответ: $f(x)=\frac{x^3}{8}+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{C_{-3/4}^{k-2}}{2^{4k-5}}+\frac{C_{-3/4}^{k-1}}{2^{4k-1}}\right)x^{3k}+o(x^{3n})$.

Приравнивая коэффициенты при x^3 найденного разложения и в формуле Маклорена, находим $\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{8}$, $f'''(0)=\frac{3}{4}$.

3. $\boxed{5}$ Построить график функции $y=\frac{(3x-5)(3-x)}{(x-2)^2}$. Найти кривизну в точке $x=1$.

При построении графика найти асимптоты, исследовать функцию с помощью первой и второй производных. Указать промежутки монотонности, выпуклость, точки перегиба, экстремумы. Указать и описать критические точки производных. Изобразить график. Рисунок должен соответствовать вычислениям.

Ответ: Асимптоты: $x=2$, $y=-3$.

$y'=-\frac{2(x-1)}{(x-2)^3}$, $\quad y''=\frac{2(2x-1)}{(x-2)^4}$.

$A\,(1;-4)$ — локальный минимум с горизонтальной касательной

$B\left(\frac{1}{2};-\frac{35}{9}\right)$ — точка перегиба, $y'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{8}{27}$.

Кривизна $k=\frac{|y''|}{\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3}=2$ при $x=1$.

4. $\boxed{5}$ Найти расстояние между прямыми $x-1=\frac{y-1}{2}=1-z$ и $\begin{cases}3x-2y+2z=1,\\2x-y-z=3.\end{cases}$

Система координат прямоугольная.

Решение. Пусть l_1 — прямая $x-1=\frac{y-1}{2}=1-z$, а l_2 — прямая $\begin{cases}3x-2y+2z=1,\\2x-y-z=3.\end{cases}$

Плоскость $\lambda(3x-2y+2z-1)+\mu(2x-y-z-3)=0$, содержащая прямую l_2 параллельна направляющему вектору $\vec{e}(1,2,-1)$ прямой l_1 $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $(3\lambda+2\mu)+2(-2\lambda-\mu)-(2\lambda-\mu)=0$ $\Leftrightarrow$ $-3\lambda+\mu=0$. Возьмём $\lambda=1$, $\mu=3$. Получим плоскость $9x-5y-z-10=0$. Расстояние от точки $M(1,1,1)$, принадлежащей прямой l_1, до этой плоскости $\frac{7}{\sqrt{107}}$.

Ответ: $\frac{7}{\sqrt{107}}$.

5. $\boxed{5}$ Даны неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти все векторы $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ такие, что

$$[[\mathbf{a},\mathbf{c}],[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{c}, \quad (\mathbf{a},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).$$

Решение. Раскрывая в равенстве $[[\mathbf{a},\mathbf{c}],[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{c}$ двойное векторное произведение по формуле «бац минус цаб», находим: $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{c} = \mathbf{c}$, откуда $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 1$.

Имеем: $(\mathbf{a},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 1$.

Пусть $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Тогда $\alpha(\mathbf{a},\mathbf{a}) + \beta(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$, $\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b}) + \beta(\mathbf{b},\mathbf{b}) = 1$, $\gamma([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{a},\mathbf{b}]) = 1$, откуда находим

$$\mathbf{c} = \frac{(\mathbf{b},\mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a},\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + [\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2}.$$

6. $\boxed{5}$ При некотором преобразовании плоскости каждая точка, имеющая координаты (x,y) в системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ переходит в точку с теми же координатами (x,y) в системе координат $O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти уравнения всех инвариантных прямых этого преобразования в системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Решение.
$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Тогда $x' = \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\eta + \frac{1}{3}$, $y' = -\frac{1}{3}\xi + \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{3}$ – формулы перехода от исходной системы координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ к новой системе координат $O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

Пусть точка $P(x,y)$ переходит при преобразовании плоскости в точку $P^*(x^*,y^*)$, где координаты этих точек — (x,y) и (x^*,y^*) — даны в исходной системе координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Тогда, согласно условию, в формулах перехода при $x' = x^*$, $y' = y^*$ выполняется $\xi = x$, $\eta = y$ и мы имеем $x^* = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}$, $y^* = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$ — аффинное преобразование.

Из системы $\lambda\alpha = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta$, $\lambda\beta = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta$ найдём направляющие векторы $\vec{p}(\alpha,\beta)$ инвариантных прямых. Таких, с точностью до коэффициента пропорциональности, оказывается два: $\vec{p}_1(1,-1)$ при $\lambda = 1$ и $\vec{p}_2(1,1)$ при $\lambda = \frac{1}{3}$. Случаю $\lambda = 1$ соответствует прямая неподвижных точек $x + y = 1$. Случаю $\lambda = \frac{1}{3}$ соответствует однопараметрическое семейство параллельных инвариантных прямых $x - y = C$.

Ответ: $x + y = 1$, $x - y = C$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЗАДАЧА ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ

для поступающих на первый курс по специальности ПМИ

6. Задан нетривиальный n–мерный числовой столбец a (здесь n — натуральное число, большее единицы). Пусть E_n — единичная $n \times n$ матрица.

а) ① Вычислить $\det(aa^{\mathrm{T}})$ и $\mathrm{rg}\,(aa^{\mathrm{T}})$.

б) ① Для любого n–мерного числового столбца b найти все решения x линейной системы уравнений

$$\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right) x = b.$$

в) ① Доказать, что матрица $\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right)$ невырождена, и вычислить обратную матрицу

$$\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

г) ② Вычислить $\det\left(E_n + aa^{\mathrm{T}}\right)$.

©2018

ОТВЕТЫ

для поступающих на первый курс по специальности ПМИ

6. Задан нетривиальный n–мерный числовой столбец a (здесь n — натуральное число, большее единицы). Пусть E_n — единичная $n \times n$ матрица.

а)① Вычислить $\det\left(aa^{\text{т}}\right)$ и $\operatorname{rg}\left(aa^{\text{т}}\right)$.

б)① Для любого n–мерного числового столбца b найти все решения x линейной системы уравнений

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) x = b.$$

в)① Доказать, что матрица $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$ невырождена, и вычислить обратную матрицу

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)^{-1}.$$

г)② Вычислить $\det\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$.

Ответ: а) $\det\left(aa^{\text{т}}\right) = 0$, $\operatorname{rg}\left(aa^{\text{т}}\right) = 1$; б) единственное решение $x = b - \frac{aa^{\text{т}}b}{1+a^{\text{т}}a}$; в) $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)^{-1} = E_n - \frac{aa^{\text{т}}}{1+a^{\text{т}}a}$; г) $\det\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) = 1 + a^{\text{т}}a$.

Решение: а) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — компоненты столбца a. Тогда столбцы матрицы $\left(aa^{\text{т}}\right)$ равны $a_1 a, \ldots, a_n a$, то есть они линейно зависимы. Следовательно, $\det\left(aa^{\text{т}}\right) = 0$. Аналогично, любой минор матрицы $\left(aa^{\text{т}}\right)$ размера больше единицы тривиален. Так как сам столбец a ненулевой, то немедленно получаем $\operatorname{rg}\left(aa^{\text{т}}\right) = 1$.

Инструкция: Вычислен детерминант — 1/2 очка, вычислен ранг — 1/2 очка.

б) Имеем:

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) x = b \quad \Rightarrow \quad \left(a^{\text{т}}x\right) + \left(a^{\text{т}}a\right)\left(a^{\text{т}}x\right) = a^{\text{т}}b \quad \Rightarrow \quad a^{\text{т}}x = \frac{a^{\text{т}}b}{1 + a^{\text{т}}a}.$$

Тогда единственным кандидатом на решение является столбец

$$x = b - a\left(a^{\text{т}}x\right) = b - \frac{a\left(a^{\text{т}}b\right)}{1 + a^{\text{т}}a} = \left(E_n - \frac{aa^{\text{т}}}{1 + a^{\text{т}}a}\right) b.$$

Непосредственной проверкой находим, что

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) x = b - \frac{a\left(a^{\text{т}}b\right)}{1 + a^{\text{т}}a} + a\left(a^{\text{т}}b\right) - \frac{a\left(a^{\text{т}}a\right)\left(a^{\text{т}}b\right)}{1 + a^{\text{т}}a} = b,$$

то есть найденный столбец x действительно является решением.

Инструкция: Найдено $a^{\text{т}}x$ — 1/2 очка.

в) Как, в частности, показано в б), для столбца $b = 0$ только столбец $x = 0$ удовлетворяет равенству

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) x = 0.$$

то есть размерность множества решений однородной системы линейных уравнений с матрицей $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$ равна нулю. С другой стороны, как известно, она равна $n - \operatorname{rg}\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$. Следовательно, $\operatorname{rg}\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) = n$, что равносильно невырожденности матрицы $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$. Поэтому существует обратная матрица $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)^{-1}$. Далее, в силу б), для любого столбца b имеем

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(E_n + aa^{\text{т}}\right)^{-1} b = \left(E_n - \frac{aa^{\text{т}}}{1 + a^{\text{т}}a}\right) b.$$

Следовательно,

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)^{-1} = E_n - \frac{aa^{\text{т}}}{1 + a^{\text{т}}a}.$$

Инструкция: Доказана невырожденность матрицы — 1/2 очка, найдена обратная матрица — 1/2 очка.

г) Матрица $aa^{\text{т}}$ имеет два различных собственных числа: число 0 кратности $n - 1$ с собственным подпространством $(\operatorname{Lin} a)^{\perp}$ размерности $n - 1$, и число $a^{\text{т}}a$ кратности 1 с собственным подпространством $\operatorname{Lin} a$ размерности 1. Следовательно, матрица $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$ имеет собственные числа 1 кратности $n-1$ и $1 + a^{\text{т}}a$ кратности 1. Пусть S — $n \times n$ матрица, первые $n-1$ столбцов которой образуют базис в $(\operatorname{Lin} a)^{\perp}$, а её последний столбец равен a. Тогда столбцы S линейно независимы, то есть $\det S \neq 0$, и справедливо равенство

$$\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) S = \Lambda S,$$

где диагональная матрица $\Lambda = \operatorname{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1 \text{штук}}, 1 + a^{\text{т}}a\}$ Отсюда получаем, что

$$\det\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) \det S = \det\Lambda \det S \quad \Rightarrow \quad \det\left(E_n + aa^{\text{т}}\right) = \det\Lambda = 1 + a^{\text{т}}a.$$

Инструкция: Найдены собственные числа матрицы $\left(E_n + aa^{\text{т}}\right)$ — 1 очко.

ОЧКИ	**ОЦЕНКА**
0–2	НЕУД. (1)
3–5	НЕУД. (2)
6–8	УДОВЛ. (3)
9–11	УДОВЛ. (4)
12–14	ХОР. (5)
15–17	ХОР. (6)
18–20	ХОР. (7)
21–23	ОТЛ. (8)
24–26	ОТЛ. (9)
27–30	ОТЛ. (10)